KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI, PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Peminatan

KELAS XII

APLIKASI TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

MATEMATIKA PEMINATAN KELAS XII

PENYUSUN
Kusnandar

SMA Negeri 4 Bogor

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

cekung ke atas : Jika grafik fungsi terletak di atas semua garis singgungnya pada suatu interval tertentu.

cekung ke bawah : Jika grafik fungsi terletak di bawah semua garis singgungnya pada suatu interval tertentu.

fungsi naik : sebarang fungsi $f(x)$ dimana x bergerak ke kanan, maka grafik fungsi tersebut bergerak ke atas atau naik.

fungsi turun : sebarang fungsi $f(x)$ dimana x bergerak ke kanan, maka grafik fungsi tersebut bergerak ke bawah atau turun.

gradien **:** kemiringan, ukuran seberapa cepat nilai fungsinya berubah; nilai turunan fungsi di titik singgungnya.

garis singgung **:** kurva bidang pada titik yang diketahui ialah garis lurus yang "hanya menyentuh" kurva pada titik tersebut.

garis normal : garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung.

nilai maksimum **:** nilai terbesar dari suatu fungsi pada interval tertentu.

nilai minimum : nilai terkecil dari suatu fungsi pada interval tertentu.

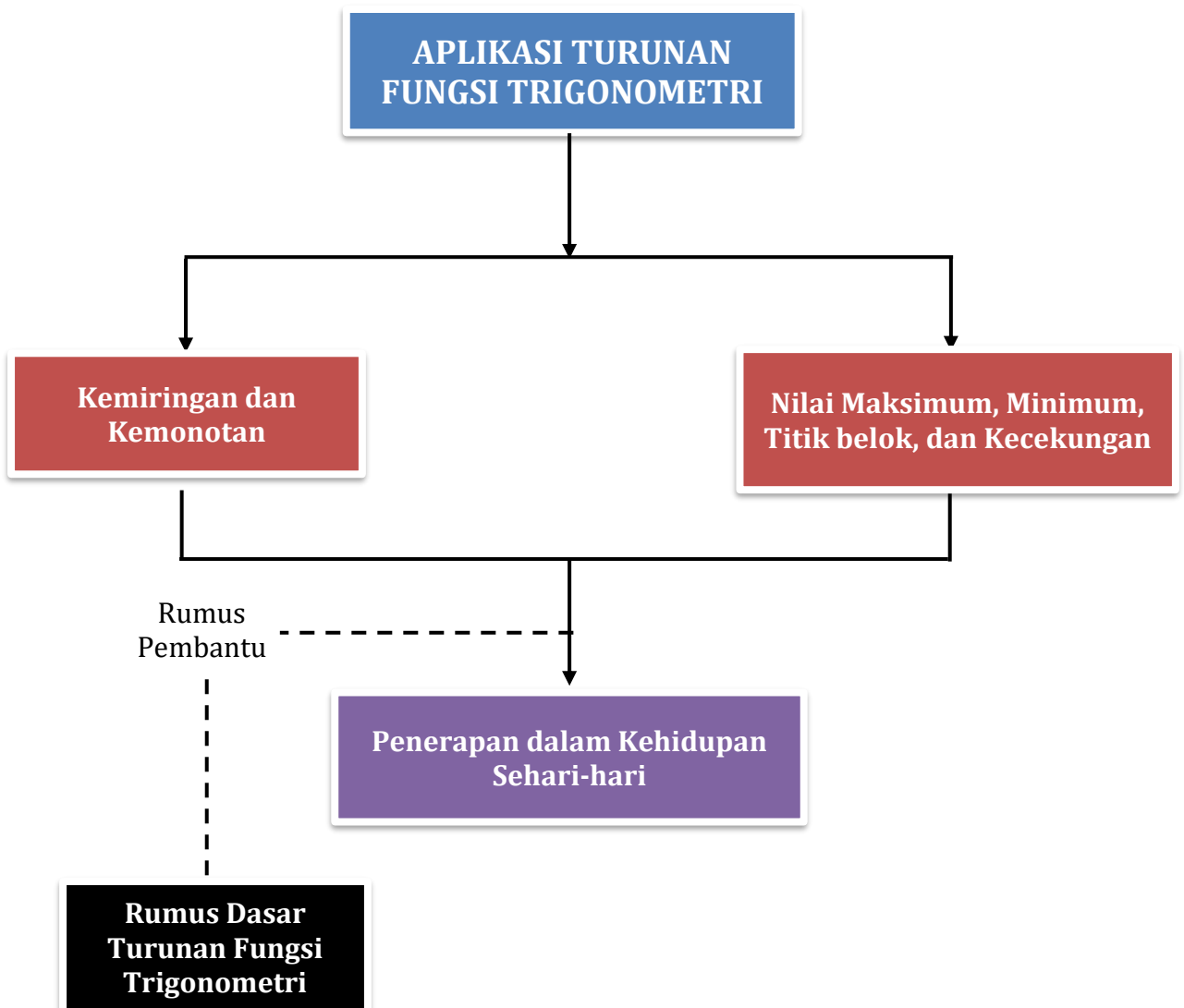
titik stasioner : titik pada kurva yang mengakibatkan kurva tersebut tidak naik dan tidak turun.

titik belok : jika fungsi cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi yang lainnya dari *I.*

turunan : laju perubahan suatu fungsi terhadap perubahan peubahnya.

PETA KONSEP

APLIKASI TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI
Kemiringan dan Kemonotan
Nilai Maksimum, Minimum, Titik belok, dan Kecekungan
Rumus Pembantu
Penerapan dalam Kehidupan Sehari-hari
Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri

`

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Peminatan
Kelas	:	XII
Alokasi Waktu	:	12 jam pelajaran
Judul Modul	:	Aplikasi Turunan Fungsi Trigonometri

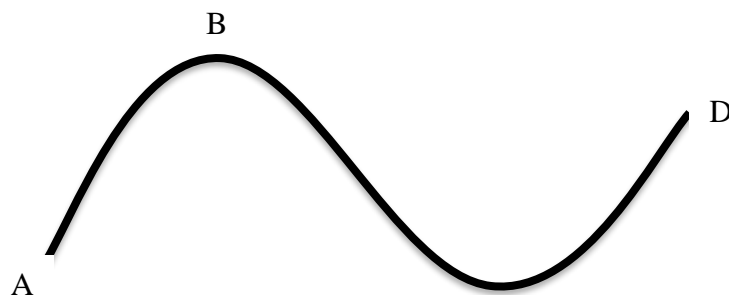
B. Kompetensi Dasar

3. 4 Menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri

4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung sertatitik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri

C. Deskripsi Singkat Materi

Konsep turunan adalah subjek yang banyak berperan dalam aplikasi matematika di kehidupan sehari-hari di berbagai bidang. Konsep turunan digunakan untuk menentukan interval fungsi naik/turun, keoptimalan fungsi dan titik belok suatu kurva. Untuk memahami apa yang akan Ananda pelajari dalam modul ini, perhatikan ilustrasi berikut.

Coba bayangkan ketika Ananda mendaki gunung. Ananda akan memulainya di kaki gunung, kemudian perlahan bergerak ke atas sampai tiba di puncak gunung. Ketika berada di puncak gunung Ananda merasa berada di titik paling atas bukan? Nahh setelah itu Ananda turun kembali menuju lembah sampai tiba di kaki gunung kembali. Pergerakan Ananda mendaki gunung dapat diilustrasikan dengan gambar sebagai berikut:

Gambar 1

Dari ilustrasi tersebut, ketika Ananda bergerak dari titik A menuju ke titik B, Ananda akan bergerak naik hingga sampai puncak, kemudian Ananda bergerak dari titik B ke titik C, pergerakan Ananda akan turun, demikian juga ketika Ananda bergerak dari titik C ke D Ananda akan bergerak naik. Deskripsi ini menggambarkan fungsi naik untuk pergerakan dari A ke B, fungsi turun

untuk pergerakan dari B ke C. Dari Gambar 1 juga dapat kita lihat terdapat puncak dan lembah. Nahh ketika Ananda berada di puncak berarti Ananda akan berada di titik maksimum, demikian juga ketika Ananda berada di bawah akan berada di titik minimum. Inilah yang disebut titik ekstrim atau titik puncak yang bisa berarti maksimum atau minimum.

Terdapat berbagai pemanfaatan aplikasi turunan dalam kehidupan sehari-hari, yaitu:

- Salah satu penerapan turunan yang paling umum adalah penentuan nilai maksimum dan minimum. Hal tersebut dapat diamati dengan seberapa sering kita mendengar atau membaca istilah keuntungan terbesar, biaya terkecil, kekuatan terbesar, dan jarak terjauh. Nilai balik maksimum suatu fungsi pada domain f dapat berupa nilai maksimum mutlak atau nilai maksimum relatif. Begitupun dengan nilai minimum, dapat berupa nilai minimum mutlak dan nilai minimum relatif. Jika dalam interval tertentu terdapat dua nilai maksimum atau lebih, nilai maksimum mutlak (*absolut*) adalah nilai tertinggi sedangkan yang lainnya merupakan nilai maksimum relatif, begitupun sebaliknya. Jika terdapat dua atau lebih nilai minimum pada suatu fungsi, maka titik terendah merupakan nilai minimum mutlak (*absolut*), sedangkan yang lainnya merupakan nilai minimum relatif.
- Turunan dapat digunakan untuk menentukan kecepatan dan percepatan sehingga sering digunakan dalam pekerjaan dan penelitian yang membutuhkan ilmu fisika. Selain itu percepatan juga digunakan dalam menghitung laju percepatan pada kegiatan lempar lembing, lempar cakram, menembak, dan lain-lain. Setiap waktu dan percepatannya mempunyai nilai yang dapat diketahui melalui fungsi turunan.
- Dalam membuat konstruksi bangunan, percampuran bahan bahan bangunan yang di lakukan oleh arsitek, pembuatan tiang-tiang, langit-langit, ruangan, dan lain lain menggunakan turunan sehingga bangunan terlihat cantik dan kokoh (optimal). Pembuatan kapal, pesawat, dan kendaraan lainnya menggunakan turunan.
- Kegunaan penurunan, terdapat juga pada *quick count*. Dalam perhitungan tersebut, terdapat juga perhitungan yang baik sehingga dapat mempunyai perhitungan yang maksimal.
- Dalam dunia penerbangan, turunan mempunyai fungsi terpenting untuk menentukkan laju pesawat dengan cepat. Pesawat akan mengikuti navigasi dari tower yang berada di bandara. Setiap laju pesawat akan terdeteksi pada navigasi (menggunakan perhitungan kalkulus otomatis) sehingga laju pesawat tidak salah arah dan percepatannya sesuai dengan panduan dari tower. (Brainly.co.id)

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi Ananda dalam melakukan kegiatan pembelajaran secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.

3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan Ananda dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan Ananda terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar Ananda dapat mengukur penguasaan terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan Ananda untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi 2 kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Kemiringan Garis Singgung dan Kemonotan Fungsi Trigonometri

Kedua : Nilai Maksimum, Nilai Minimum, Kecekungan, dan Titik Belok Fungsi Trigonometri

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

Kemiringan Garis Singgung dan Kemonotan Fungsi Trigonometri

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini, diharapkan Ananda dapat menjelaskan keberkaitan turunan pertama fungsi trigonometri dengan kemiringan garis singgung dan selang kemonotonan fungsi (interval fungsi naik dan fungsi turun) dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kemiringan garis singgung serta persamaan garis singgung dan selang kemonotonan fungsi trigonometri.

B. Uraian Materi

Dalam mempelajari modul Aplikasi Turunan Fungsi Trigonometri ada beberapa materi prasayarat yang harus dipelajari kembali, diantaranya adalah rumus turunan atau diferensial fungsi aljabar dan fungsi trigonometri beserta sifat-sifatnya dan rumus dasar persamaan trigonometri.

Rumus Turunan Fungsi Aljabar dan Trigonometri serta Sifat-sifatnya

Untuk $u = u(x)$ dan $v = v(x)$, berlaku:

- $y = \sin u \Rightarrow y' = \cos u \,.\, u'$
- $y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u \,.\, u'$
- $y = \tan u \Rightarrow y' = \sec^2 u \,.\, u'$
- $y = \cot u \Rightarrow y' = -\csc^2 u \,.\, u'$
- $y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \tan x$
- $y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x \cot x$
- $y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n\cos^{n-1} u \,.\sin u \,.u'$
- $y = \sin^n u \Rightarrow y' = n\sin^{n-1} u \,.\cos u \,.u'$
- $y = ax^n \Rightarrow y' = anx^{n-1}$
- $y = u^n \Rightarrow y' = n\, u^{n-1} .\, u'$
- $y = u \pm v \Rightarrow y' = u' \pm v'$
- $y = u \,.\, v \Rightarrow y' = u' .\, v + u \,.\, v'$
- $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Rumus Dasar Persamaan Trigonometri

Untuk menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri sederhana, perhatikan rumusan berikut.

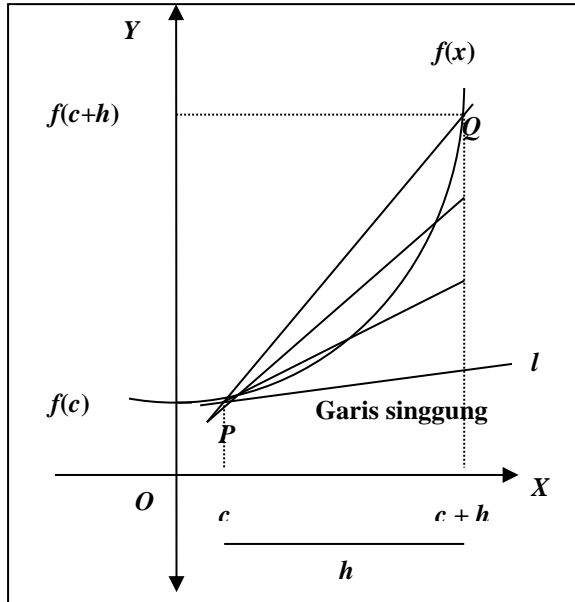
- $\sin x = \sin \alpha$
  $x = \alpha + n.2\pi$
  $x = (\pi - \alpha) + n.2\pi$
- $\cos x = \cos \alpha$
  $x = \alpha + n.\,2\pi$
  $x = -\,\alpha + n.2\pi$
- $\tan x = \tan \alpha$
  $x = \alpha + n.\,\pi$

$n \in B = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ dan π dapat diganti dengan 180^{o}

Nah pada modul pembelajaran kali ini Ananda akan mempelajari di interval dimana fungsi naik dan fungsi turun serta statsionernya.

Kemiringan Garis Singgung

Perhatikan Gambar 2 berikut!

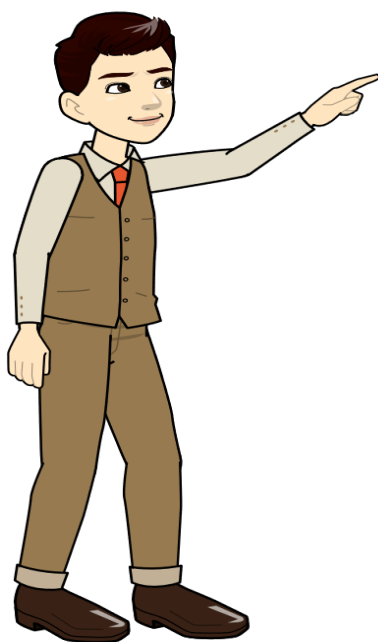
Gambar 2. Konsep kemiringan garis singgung

Misalkan P adalah sebuah titik tetap pada suatu kurva dan andaikan Q adalah sebuah titik berdekatan yang dapat dipindah-pindahkan pada kurva tersebut. Koordinat titik P adalah $(c, f(c))$, titik Q mempunyai koordinat $(c + h, f(c + h))$. Tali busur yang melalui P dan Q mempunyai kemiringan atau gradien

$$m_{PQ} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Garis l merupakan garis singgung kurva di titik P. Kemiringan (gradien) garis singgung l adalah:

$$m = f'(c) = \lim_{h\to 0} m_{PQ}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ dititik (x_1 , y_1) adalah $y - y_1 = m\ (x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$

Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung. Persamaannya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.

Catatan:
Pengertian dua garis sejajar dan tegak lurus sering muncul dalam persamaan garis singgung.

- Misalkan garis $g: y = m_1x + c_1$ sejajar garis $h: y = m_2x + c_2$ di mana m_1 dan m_2 masing-masing gradien dari garis g dan h, maka $m_1 = m_2$.
- Misalkan garis $g: y = m_1x + c_1$ tegak lurus garis $h: y = m_2x + c_2$ di mana m_1 dan m_2 masing-masing gradien dari garis g dan h, maka $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Contoh 1

Tentukan gradien garis singgung kurva $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ di $x = \frac{\pi}{2}$.

Penyelesaian:

- Tentukan turunan pertama dari fungsi y
  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
  $\frac{dy}{dx} = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
- Tentukan gradien garis singgung m
  $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}$
  $m = 2\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{6} = 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}$
- Jadi, gradien garis singgung kurva adalah $-\sqrt{3}$.

Contoh 2

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada kurva $y = \tan x$ di tiik berabsis $\frac{\pi}{3}$.

Penyelesaian :

- Tentukan titik singgung (x_1, y_1)
  absis = x dan ordinat = y
  $x_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y_1 = \tan x_1$
  $y_1 = \tan\frac{\pi}{3}$
  $= \sqrt{3}$
  Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = \left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$
- Tentukan turunan pertama fungsi y
  $y = \tan x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$
- Tentukan gradien m
  $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = \sec^2\frac{\pi}{3} = (2)^2 = 4$
- Tentukan persamaan garis singgung
  $y - y_1 = m\,(x - x_1)$
  $\Leftrightarrow y - \sqrt{3} = 4\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
  $\Leftrightarrow 3y - 3\sqrt{3} = 12x - 4\pi$ (kedua ruas kalikan dengan 3)
  $\Leftrightarrow 12x - 3y - 4\pi + 3\sqrt{3} = 0$
- Tentukan persamaan garis normal
  $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$
  $\Leftrightarrow y - \sqrt{3} = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
  $\Leftrightarrow 12y - 12\sqrt{3} = -3x + \pi$ (kedua ruas kalikan dengan 12)
  $\Leftrightarrow 3x + 12y - \pi - 12\sqrt{3} = 0$
- Kesimpulan
  Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = \tan x$ di tiik berabsis $\frac{\pi}{3}$ adalah $12x - 3y - 4\pi + 3\sqrt{3} = 0$ dan persamaan garis normalnya adalah $3x + 12y - \pi - 12\sqrt{3} = 0$.

Contoh 3

Diketahui kurva $y = \cos^2 (x + 15^o)$ pada interval $0^o \le x \le 90^o$. Tentukan persamaan garis singgung yang tegak lurus dengan garis $6x + 3y - 1 = 0$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi y

  $y = \cos^2 (x + 15^o)$

  $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2\cos(x + 15^o)\sin(x + 15^o)$

  $= -\sin 2(x + 15^o)$

  $= -\sin(2x + 30^o)$

- Tentukan gradien garis singgung

  Misal garis h: $6x + 3y - 1 = 0$

  $y = -2x - \frac{1}{3} \Rightarrow m_h = -2$

  Misal g adalah garis singgung kurva, karena garis g tegak lurus garis h ($g \perp h$), maka $m_g \cdot m_h = -1$

  $m_g \cdot (-2) = -1$

  $m_g = \frac{1}{2}$

- Tentukan titik singgung (x_1, y_1)

  $m_g = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$

  $\frac{1}{2} = -\sin(2x_1 + 30^o)$

  $\sin(2x_1 + 30^o) = -\frac{1}{2}$

  $\sin(2x_1 + 30^o) = \sin 210^o$ ($\sin x = \sin \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = (\pi - \alpha) + n.2\pi$)

  $2x + 30^o = 210^o + n.360^o$ atau $2x + 30^o = (180^o - 210^o) + n.360^o$

  $2x = 180^o + n.360^o$ atau $2x = -60^o + n.360^o$

  $x = 90^o + n.180^o$ atau $x = -30^o + n.180^o$

  $n = 0 \Rightarrow x = 90^o$ $n = 1 \Rightarrow x = 150^o$ (tidak memenuhi $0^o \le x \le 90^o$)

  - $x = 90^o \Rightarrow y = \cos^2 (90^o + 15^o) = \cos^2 (105^o)$

    $\cos (105^o) = \cos (60^o + 45^o)$

    $= \cos 60^o \cos 45^o - \sin 60^o \sin 45^o$

    $= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{2}$

    $= \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

    $y = \cos^2 (105^o) = \left(\frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})\right)^2 = \frac{1}{16}(8 - 4\sqrt{3}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$

  Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = (\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3})$

- Tentukan persamaan garis singgung

  $y - y_1 = m_g (x - x_1)$

  $\Leftrightarrow y - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})$

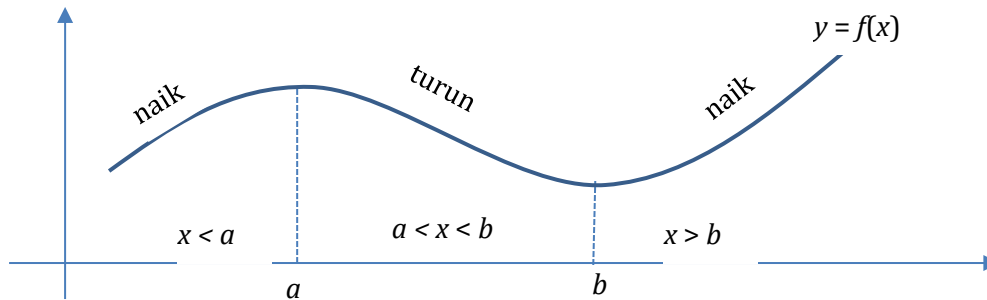
  $\Leftrightarrow 4y - 2 + \sqrt{3} = 2x - \pi$ (kedua ruas kalikan dengan 4)

  $\Leftrightarrow 2x - 4y - \pi + 2 - \sqrt{3} = 0$

- Kesimpulan

  Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = \cos^2 (x + 15^o)$ pada interval $0^o \le x \le 90^o$ dan tegak lurus dengan garis $6x + 3y - 1 = 0$ adalah $2x - 4y - \pi + 2 - \sqrt{3} = 0$.

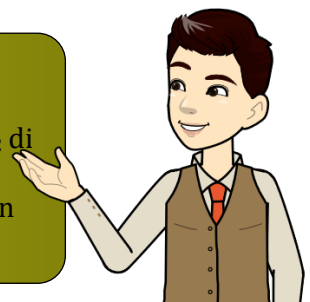
Kemonotan Fungsi

Secara grafik, jika kurva suatu fungsi merupakan sebuah kurva mulus, maka fungsi monoton naik dan fungsi monoton turun dapat dengan mudah Ananda amati. Misalnya untuk grafik fungsi yang digambarkan dibawah ini, Ananda dapat mengatakan bahwa fungsi $y = f(x)$ monoton naik pada interval $x < a$ atau $x > b$, monoton turun pada interval $a < x < b$. Kadangkala istilah monoton bisa dihilangkan sehingga menjadi fungsi naik dan fungsi turun.

Gambar 3. Interval kurva naik dan turun

Secara aljabar pengertian fungsi naik dan fungsi turun adalah sebagai berikut.

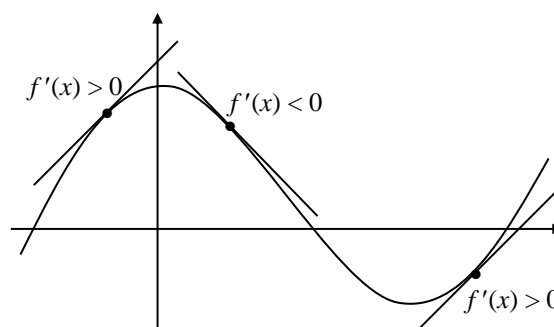
Definisi 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang terdefinisi di selang I.

- Fungsi f disebut ***naik*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
- Fungsi f dikatakan ***turun*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.

Ingat kembali bahwa turunan pertama $f'(x)$ memberikan makna kemiringan dari garis singgung pada grafik f di titik x. Jika $f'(x) > 0$, garis singgung naik ke kanan (lihat Gambar 3), jika $f'(x) < 0$, garis singgung jatuh ke kanan Untuk menyelidiki atau mencari interval di mana fungsi naik dan di mana fungsi turun, Ananda dapat menggunakan turunan pertama seperti teorema berikut.

Teorema 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang terdefinisi di selang I dan f mempunyai turunan di I.

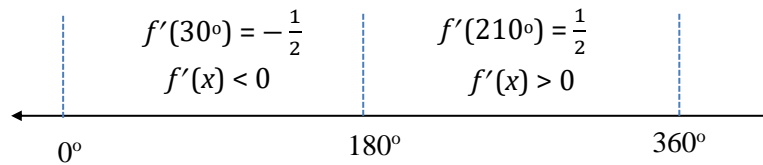
- Jika $f'(x) > 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi naik.
- Jika $f'(x) < 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi turun.

Gambar 3 Fungsi naik dan fungsi turun

Agar Ananda lebih mahir dalam menentukan interval di mana fungsi naik dan turun pada fungsi trigonometri, pelajari contoh berikut.

Contoh 4

Tentukan interval fungsi naik dan fungsi turun dari fungsi trigonometri $f(x) = \cos x$ pada interval $[0, 360^o]$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
  $f(x) = \cos x$
  $f'(x) = -\sin x$ (turunan $y = \cos x$ adalah $y' = -\sin x$)
- Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$
  $f'(x) = 0$
  $-\sin x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan (−1))
  $\sin x = 0$
  $x = 0^o, 180^o, 360^o$
- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

Gambar 4 Uji nilai $f'(x)$

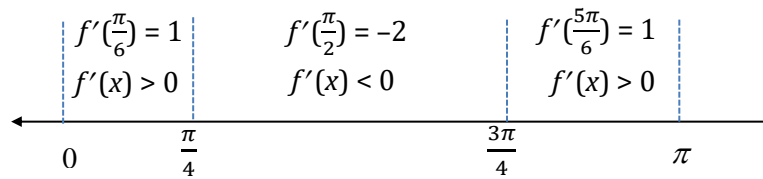
- Kesimpulan
  - Syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga berdasarkan Gambar 4 $f(x)$ naik pada interval $180^o < x < 360^o$.
  - Syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga berdasarkan Gambar 4 $f(x)$ turun pada interval $0^o < x < 180^o$.

Contoh 5

Tentukan interval fungsi naik dan fungsi turun dari fungsi trigonometri $f(x) = \sin 2x$ pada interval $[0, \pi]$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
  $f(x) = \sin 2x$
  $f'(x) = 2\cos 2x$ (turunan $y = \sin ax$ adalah $y' = a\cos ax$)
- Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$
  $f'(x) = 0$
  $2\cos 2x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{2}$)
  $\cos 2x = 0$
  $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{2}$ (cos x = cos α maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = -\alpha + n.2\pi$)
  $2x = \frac{\pi}{2} + n.\,2\pi$ $\quad$ $2x = -\frac{\pi}{2} + n.\,2\pi$
  $x = \frac{\pi}{4} + n.\,\pi$ $\quad$ $x = -\frac{\pi}{4} + n.\,\pi$
  $n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ $n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

Gambar 5 Uji nilai $f'(x)$

- Kesimpulan
  - Syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga berdasarkan Gambar 5 $f(x)$ naik pada interval $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ atau $\frac{3\pi}{4} < x \le \pi$.
  - Syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga berdasarkan Gambar 5 $f(x)$ turun pada interval $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

C. Rangkuman

- Gradien garis singgung di titik (x_1, y_1) adalah $m = f'(x_1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$
- Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ dititik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$
- Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung. Persamaannya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.
- Misalkan f fungsi yang terdefinisi di selang I.
  - Fungsi f disebut ***naik*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
  - Fungsi f dikatakan ***turun*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.
- Misalkan f fungsi yang terdefinisi di selang I dan f mempunyai turunan di I.
  - Jika $f'(x) > 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi naik.
  - Jika $f'(x) < 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi turun.

D. Latihan Soal

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Gradien garis singgung kurva y = tan x di $x = \frac{\pi}{4}$ adalah ....
   A. – 3
   B. –2
   C. –1
   D. 2
   E. 3

2. Gradien garis singgung kurva y = sin $(2x + \frac{\pi}{6})$ di $x = \frac{\pi}{3}$ adalah ....
   A. $-\sqrt{3}$
   B. $-\sqrt{2}$
   C. -1
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   E. $\sqrt{3}$

3. Gradien garis singgung kurva $y = \sqrt{3}$ sin x – cos x di titik berabsis $x = \frac{\pi}{6}$ adalah ....
   A. –2
   B. $-1\frac{1}{2}$
   C. 1
   D. $1\frac{1}{2}$
   E. 2

4. Persamaan garis singgung kurva y = csc x di titik $(30^o, 2)$ adalah ....
   A. $y = -2\sqrt{3}(x - 30^o) - 2$
   B. $y = -2\sqrt{3}(x + 30^o) + 2$
   C. $y = -2\sqrt{3}(x - 30^o) + 2$
   D. $y = 2\sqrt{3}(x - 30^o) + 2$
   E. $y = 2\sqrt{3}(x - 30^o) - 2$

5. Persamaan garis normal dari fungsi y = tan x di titik $(\frac{1}{4}\pi, 1)$ adalah ...
   A. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi + 1$
   B. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\pi - 1$
   C. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi - 1$
   D. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\pi - 1$
   E. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\pi + 1$

6. Diketahui garis g menyinggung kurva y = sin x + cos x di titik yang berabsis $\frac{1}{2}\pi$.
   Garis g memotong sumbu Y dititik ....
   A. $(0, 1 - \frac{\pi}{2})$
   B. $(0, 1)$
   C. $(0, \frac{\pi}{2})$
   D. $(0, \pi)$
   E. $(0, 1 + \frac{\pi}{2})$

7. Grafik fungsi $f(x)$ = sin x akan turun pada interval ....
   A. $0^o < x < 90^o$
   B. $0^o < x < 180^o$
   C. $90^o < x < 1800^o$
   D. $90^o < x < 270^o$
   E. $270^o < x < 360^o$

8. Grafik fungsi $f(x)$ = cos $2x$ akan naik pada interval ....
   A. $0 < x < \frac{\pi}{2}$
   B. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
   C. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$
   D. $\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$
   E. $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

9. Grafik fungsi $f(x)$ = $\sin^2 x$ akan naik pada interval ....
   A. $0 < x < \frac{\pi}{2}$
   B. $0 < x < \pi$
   C. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
   D. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$
   E. $\pi < x < 2\pi$

10. Grafik fungsi $f(x)$ = $\cos^2 (x + 10^o)$ pada interval $0^o < x < 90^o$ akan ....
    A. turun
    B. naik
    C. turun-naik-turun
    D. turun kemudian naik
    E. naik kemudian turun

Pembahasan Latihan Soal Kegiatan Pembelajaran 1

1. Gradien garis singgung kurva y = tan x di $x = \frac{\pi}{4}$ adalah ....
   Jawaban: D
   ❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi y
   $y = \tan x$
   $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$
   ❖ Tentukan gradien garis singgung m
   $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$
   $m = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) =$
   Penyelesaian:
   $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$
   ❖ Jadi, gradien garis singgung kurva adalah 2.

2. Gradien garis singgung kurva $y = \sin\,(2x + \frac{\pi}{6})$ di $x = \frac{\pi}{3}$ adalah ....
   Jawaban: A
   Penyelesaian:
   ❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi y
   $y = \sin\,(2x + \frac{\pi}{6})$
   $\frac{dy}{dx} = 2\cos(2x + \frac{\pi}{6})$
   ❖ Tentukan gradien garis singgung m
   $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}}$
   $m = 2\cos\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}$
   ❖ Jadi, gradien garis singgung kurva adalah $-\sqrt{3}$.

3. Gradien garis singgung kurva $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ di titik berabsis $x = \frac{\pi}{6}$ adalah ....
   Jawaban: E
   Penyelesaian:
   ❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi y
   $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$
   $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\cos x + \sin x$
   ❖ Tentukan gradien garis singgung m
   $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{6}}$
   $m = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\,\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$
   ❖ Jadi, gradien garis singgung kurva adalah 2.

4. Persamaan garis singgung kurva $y = \csc x$ di titik $(30^o, 2)$ adalah ....
   Jawaban: C
   Penyelesaian:
   ❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi y
   $y = \csc x$
   $\frac{dy}{dx} = -\csc x \cot x$
   ❖ Tentukan gradien garis singgung m
   $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=30^o}$

m = –csc 30º cot 30º= –2($\sqrt{3}$) = –2$\sqrt{3}$

- Tentukan persamaan garis singgung di titik (30º, 2)

$y - y_1 = m\ (x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - 2 = -2\sqrt{3}\ (x - 30^o)$

$\Leftrightarrow y\ = -2\sqrt{3}\ (x - 30^o) + 2$

5. Persamaan garis normal dari fungsi $y = \tan x$ di titik ($\frac{1}{4}\pi$, 1) adalah …

Jawaban: E

Penyelesaian:

- Tentukan turunan pertama dari fungsi y

$y = \tan x$

$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$

- Tentukan gradien garis singgung m

$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$

$m = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

- Tentukan persamaan garis normal di titik ($\frac{\pi}{4}$, 1)

$y - y_1 = -\frac{1}{m}\ (x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}\ (x - \frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow y\ = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$

6. Diketahui garis g menyinggung kurva $y = \sin x + \cos x$ di titik yang berabsis $\frac{1}{2}\pi$. Garis g memotong sumbu Y dititik ….

Jawaban: E

Penyelesaian:

- Tentukan turunan pertama dari fungsi y

$y = \sin x + \cos x$

$\frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$

- Tentukan gradien garis singgung m

$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}$

$m = \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$

- Tentukan titik singgung (x_1, y_1)

$y = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$

Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = (\frac{\pi}{2}, 1)$

- Tentukan persamaan garis singgung

$y - y_1 = m\ (x - x_1)$

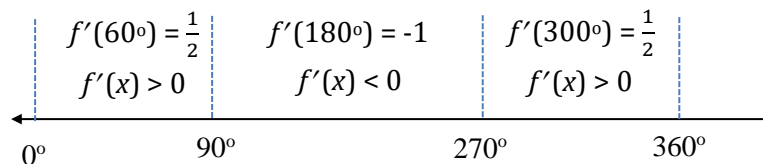
$\Leftrightarrow y - 1 = -\ 1(x - \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow y = -x + \frac{\pi}{2} + 1$

- Tentukan titik potong dengan sumbu Y

$x = 0 \Rightarrow y = 0 + \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi}{2} + 1$

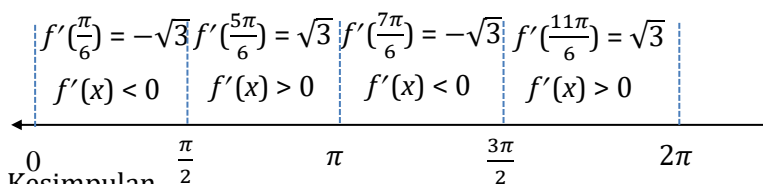
Jadi, garis g memotong sumbu Y dititik $(0, \frac{\pi}{2} + 1)$

7. Grafik fungsi $f(x)$ = sin x akan turun pada interval ...
   Jawaban: D
   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$
     $f(x) = \sin x$
     $f'(x) = \cos x$
   - Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$
     $f'(x) = 0$
     $\cos x = 0$
     $x = 90^o, 270^o$
   - Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

   - Kesimpulan
     Syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $90^o < x < 270^o$.

8. Grafik fungsi $f(x)$ = cos $2x$ akan naik pada interval ...
   Jawaban: B
   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$
     $f(x) = \cos 2x$
     $f'(x) = -2 \sin 2x$
   - Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$
     $f'(x) = 0$
     $-2 \sin 2x = 0$
     $\sin 2x = 0$
     $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$
   - Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

$f'(\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$ $f'(\frac{5\pi}{6}) = \sqrt{3}$ $f'(\frac{7\pi}{6}) = -\sqrt{3}$ $f'(\frac{11\pi}{6}) = \sqrt{3}$

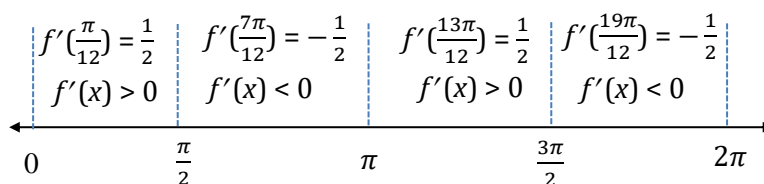
$f'(x) < 0$ $f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$ $f'(x) > 0$

0 $\frac{\pi}{2}$ π $\frac{3\pi}{2}$ 2π

   - Kesimpulan
     Syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ naik pada interval $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ dan $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

9. Grafik fungsi $f(x) = \sin^2 x$ akan naik pada interval ....
   Jawaban: A
   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$
     $f(x) = \sin^2 x$
     $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$
   - Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$
     $f'(x) = 0$
     $\sin 2x = 0$
     $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

$f'(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}$	$f'(\frac{7\pi}{12}) = -\frac{1}{2}$	$f'(\frac{13\pi}{12}) = \frac{1}{2}$	$f'(\frac{19\pi}{12}) = -\frac{1}{2}$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$

$0 \qquad \frac{\pi}{2} \qquad \pi \qquad \frac{3\pi}{2} \qquad 2\pi$

❖ Kesimpulan

Syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ naik pada interval $0 < x < \frac{\pi}{2}$ dan $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

10. Grafik fungsi $f(x) = \cos^2 (x + 10^o)$ pada interval $0^o < x < 90^o$ akan ....

Jawaban: D

Penyelesaian:

❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$

$f(x) = \cos^2 (x + 10^o)$

$f'(x) = -2\cos (x + 10^o) \sin (x + 10^o) = -\sin 2(x + 10^o)$

❖ Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$

$f'(x) = 0$

$-\sin 2(x + 10^o) = 0$

$\sin (2x + 20^o) = 0$

$\sin (2x + 20^o) = \sin 0^o$ ($\sin x = \sin \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = (\pi - \alpha) + n.2\pi$)

$2x + 20^o = 0^o + n.360^o$ atau $2x + 20^o = (180^o - 0^o) + n.360^o$

$2x = -20^o + n.360^o$ atau $2x = 160^o + n.360^o$

$x = -10^o + n.180^o$ atau $x = 80^o + n.180^o$

$n = 1 \Rightarrow x = 170^o$ $\qquad n = 0 \Rightarrow x = 80^o$

$n = 2 \Rightarrow x = 350^o$ $\qquad n = 1 \Rightarrow x = 260^o$

❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

$f'(5^o) = -\frac{1}{2}$	$f'(95^o) = \frac{1}{2}$	$f'(185^o) = -\frac{1}{2}$	$f'(275^o) = \frac{1}{2}$	
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$

$0^o \qquad 80^o \qquad 170^o \qquad 260^o \qquad 350^o$

❖ Kesimpulan

- Syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ naik pada interval $80^o < x < 170^o$ dan $260^o < x < 350^o$.
- Syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $0^o < x < 80^o$, $170^o < x < 2600^o$ dan $350^o < x < 360^o$.
- Jadi, pada interval $0^o < x < 90^o$ grafikk fungsi turun kemudian naik.

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	**Tidak**
1.	Apakah Ananda mampu menentukan turunan fungsi trigonometri ?		
2.	Apakah Ananda mampu menentukan kemiringan garis singgung suatu kurva trigonometri?		
3.	Apakah Ananda mampu menentukan persamaan garis singgung pada fungsi trigonometri?		
4.	Apakah Ananda mampu menentukan persamaan garis normal pada fungsi trigonometri?		
5.	Apakah Ananda mampu menentukan interval fungsi naik pada fungsi trigonometri ?		
6.	Apakah Ananda mampu menentukan interval fungsi turun pada fungsi trigonometri ?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Nilai Maksimum, Nilai Minimum, Titik Belok, dan Kecekungan Fungsi Trigonometri

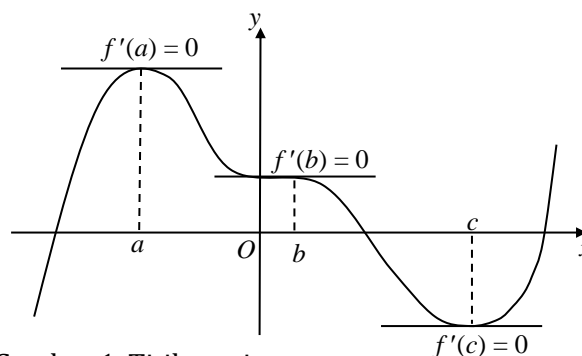
A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Ananda dapat menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi trigonometri dengan nilai maksimum, nilai minimum, titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.

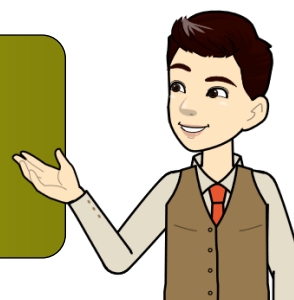
B. Uraian Materi

Titik dan Nilai Stasioner Fungsi Trigonometri

Titik stasioner terjadi apabila garis singgung pada kurva di titik tersebut merupakan garis horisontal. Perhatikan Gambar a disamping.

Definisi titik stasioner diberikan sebagai berikut:

Gambar 1. Titik stasioner

Definisi 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang yang mempunyai turunan.
Jika $f'(a) = 0$, maka $f(x)$ stasioner di titik $x = a$, dengan
- Nilai $f(a)$ disebut nilai stasioner $f(x)$ di $x = a$.
- Titik $(a, f(a))$ disebut titik stasioner

Contoh 1

Tentukan titik dan nilai stasioner fungsi $y = f(x) = \cos 2x$ pada interval $0 \le x \le 2\pi$

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
  $f(x) = \cos 2x$
  $f'(x) = -2 \sin 2x$ (turunan $y = \cos ax$ adalah $y' = -a \sin ax$)
- Syarat stasioner
  $f'(x) = 0$
  $-2 \sin 2x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $-\frac{1}{2}$)
  $\sin 2x = 0$

$\sin 2x = \sin 0$ ($\sin x = \sin \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = (\pi - \alpha) + n.2\pi$)

$2x = 0 + n.\,2\pi$
$x = n.\,\pi$
$n = 0 \Rightarrow x = 0$
$n = 1 \Rightarrow x = \pi$
$n = 2 \Rightarrow x = 2\pi$

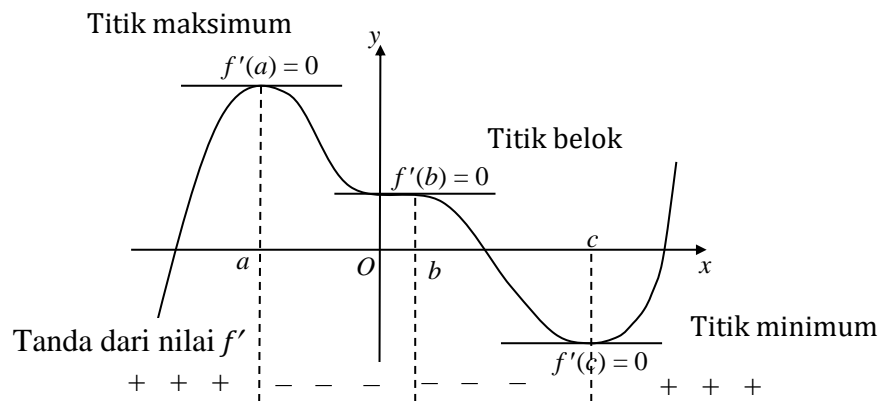
$2x = \pi + n.\,2\pi$
$x = \frac{\pi}{2} + n.\,\pi$
$n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
$n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

- Menentukan nilai stasioner

  $x = 0 \Rightarrow f(0) = \cos 2(0) = \cos 0 = 1$
  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = \cos 2(\frac{\pi}{2}) = \cos \pi = -1$
  $x = \pi \Rightarrow f(\pi) = \cos 2(\pi) = \cos 2\pi = 1$
  $x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{3\pi}{2}) = \cos 2(\frac{3\pi}{2}) = \cos 3\pi = -1$
  $x = 2\pi \Rightarrow f(2\pi) = \cos 2(2\pi) = \cos 4\pi = 1$

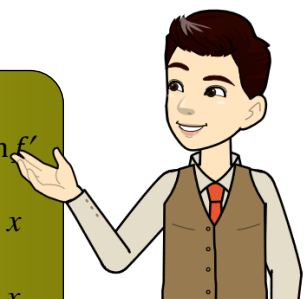
- Kesimpulan
  - Nilai stasionernya adalah– 1 dan 1.
  - Titik stasionernya adalah $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, -1)$, $(\pi, 1)$, $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ dan $(2\pi, 1)$.

Uji Turunan Pertama untuk Menentukan Titik Maksimum, Titik Minimum, dan Titik Belok

Perhatikan Gambar 2 berikut, menentukan titik maksimum, titik minimum, dan titik belok menggunakan uji turunan pertama, diuraikan dalam sifat berikut.

Gambar 2. Titik Maksimum, Titik Minimum, dan Titik Belok

Sifat 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang yang mempunyai turunan dan $f'(a) = 0$

- Jika nilai f' bertanda positif di $x < a$ dan bertanda negatif di $x > a$, maka $(a, f(a))$ disebut titik maksimum lokal.
- Jika nilai f' bertanda negatif di $x < c$ dan bertanda positif di $x > c$, maka $(c, f(c))$ disebut titik minimum lokal.
- Jika disekitar titik $x = b$ tidak ada perubahan tanda nilai f', maka $(b, f(b))$ disebut titik belok horisontal.

Untuk lebih memahami lagi Ananda dalam menentukan titik maksimum, titik minimum, dan titik belok menggunakan uji turunan pertama, pelajari contoh berikut.

Contoh 2

Menggunakan uji turunan pertama, carilah titik maksimum dan minimum fungsi trigonometri $y = \cos 2x$ pada interval $0 \le x \le 2\pi$.

Penyelesaian :

❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

$f(x) = \cos 2x$

$f'(x) = -2 \sin 2x$ (turunan $y = \cos ax$ adalah $y' = -a \sin ax$)

❖ Syarat stasioner

$f'(x) = 0$

$-2 \sin 2x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $-\frac{1}{2}$)

$\sin 2x = 0$

$\sin 2x = \sin 0$ ($\sin x = \sin \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = (\pi - \alpha) + n.2\pi$)

$2x = 0 + n.\,2\pi$

$x = n.\,\pi$

$n = 0 \Rightarrow x = 0$

$n = 1 \Rightarrow x = \pi$

$n = 2 \Rightarrow x = 2\pi$

$2x = \pi + n.\,2\pi$

$x = \frac{\pi}{2} + n.\,\pi$

$n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

❖ Menentukan nilai stasioner

$x = 0 \Rightarrow f(0) = \cos 2(0) = \cos 0 = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = \cos 2(\frac{\pi}{2}) = \cos \pi = -1$

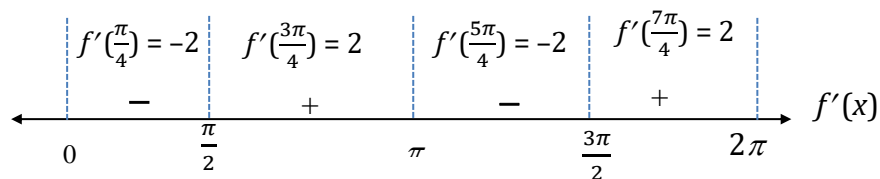
$x = \pi \Rightarrow f(\pi) = \cos 2(\pi) = \cos 2\pi = 1$

$x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{3\pi}{2}) = \cos 2(\frac{3\pi}{2}) = \cos 3\pi = -1$

$x = 2\pi \Rightarrow f(2\pi) = \cos 2(2\pi) = \cos 4\pi = 1$

➢ Nilai stasionernya adalah– 1 dan 1.

➢ Titik stasionernya adalah $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, -1)$, $(\pi, 1)$, $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ dan $(2\pi, 1)$.

❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

Gambar 3 Uji nilai $f'(x)$

❖ Kesimpulan

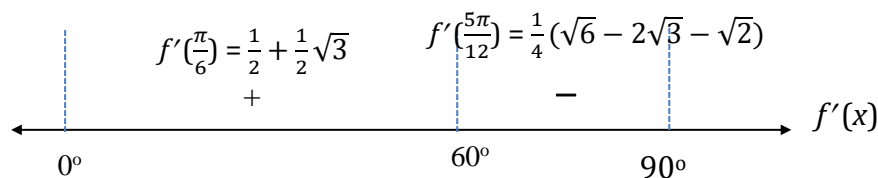
➢ Titik $(0, 1)$, $(\pi, 1)$, dan $(2\pi, 1)$ merupakan titik balik maksimum, karena f' berubah tanda dari + (positif) ke – (negatif)

➢ titik $(\frac{\pi}{2}, -1)$ dan $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ merupakan titik balik minimum, karena f' berubah tanda dari – (negatif) ke + (positif).

Contoh 3

Menggunakan uji turunan pertama, carilah titik maksimum dan minimum fungsi trigonometri $y = \sin x\,(1 + \cos x)$ pada interval $0^o < x < 90^o$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
  $f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$
  $f'(x) = \cos x\,(1 + \cos x) + \sin x\,(-\sin x)$ (turunan $y = u\,.\,v$ adalah $y' = u'v + uv'$)
  $f'(x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$
  $f'(x) = \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$ ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)
  $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$
- Syarat stasioner
  $f'(x) = 0$
  $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$
  $(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$ (faktorkan)
  $\cos x = \frac{1}{2}$ atau $\cos x = -1$
  $x = 60^o$ $x = 180^o$ (tidak memenuhi karena $0^o < x < 90^o$)
- Menentukan nilai stasioner
  $x = 60^o \Rightarrow f(60^o) = \sin 60^o\,(1 + \cos 60^o) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$
  - Nilai stasionernya adalah $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.
  - Titik stasionernya adalah $\left(60^o, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.
- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

Gambar 4 Uji nilai $f'(x)$

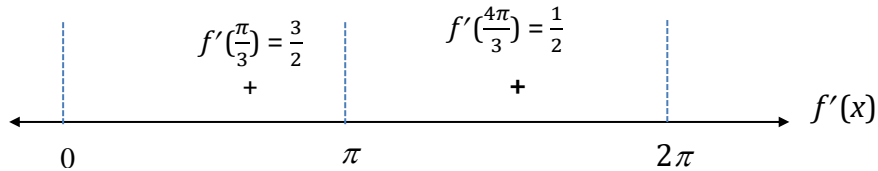
- Kesimpulan
  Titik $\left(60^o, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$ merupakan titik balik maksimum, karena f' berubah tanda dari + (positif) ke – (negatif)

Contoh 4

Menggunakan uji turunan pertama, carilah titik belok fungsi trigonometri $y = x + \sin x$ pada interval $0 < x < 2\pi$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
  $f(x) = x + \sin x$
  $f'(x) = 1 + \cos x$
- Syarat stasioner
  $f'(x) = 0$
  $1 + \cos x = 0$
  $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

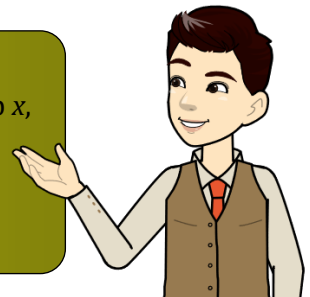
- Menentukan nilai stasioner
  $x = \pi \Rightarrow f(\pi) = \pi + \sin \pi = \pi$
  - Nilai stasionernya adalah π.
  - Titik stasionernya adalah (π, π).
- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

Gambar 5 Uji nilai $f'(x)$

- Kesimpulan
  Titik (π, π) merupakan titik belok, karena f' disekitar titik $x = \pi$ tidak ada perubahan tanda (positif (+) ke positif (+)).

Uji Turunan Kedua untuk Menentukan Titik Maksimum, Titik Minimum, Kecekungan, dan Titik Belok

Sebelum menentukan titik maksimum, titik minimum, kecekungan, dan titik belok menggunakan uji turunan kedua, Ananda harus memahami terlebih dahulu definisi turunan kedua.

Definisi 2

Jika $f'(x)$ (turunan pertama suatu fungsi) diturunkan lagi terhadap x, maka akan diperoleh turunan kedua fungsi $f(x)$ terhadap x, ditulis dengan $f''(x)$ atau y'' atau $\frac{d^2 f}{dx^2}$ atau $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Contoh 5

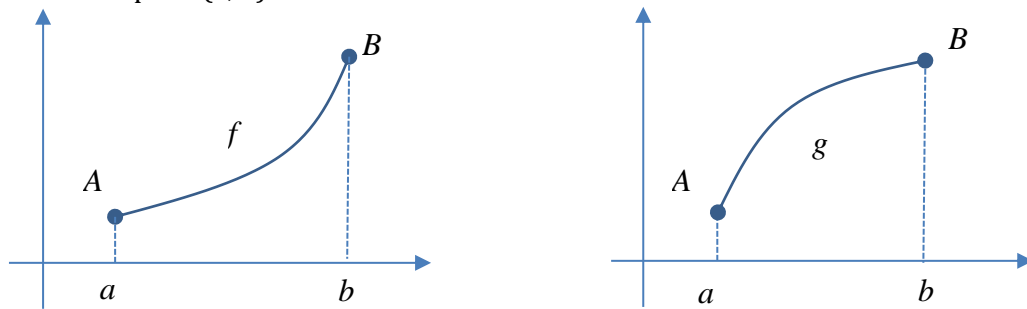
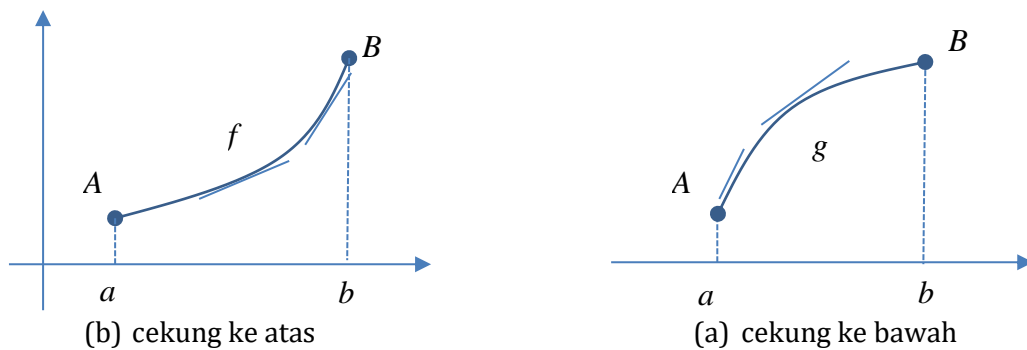
Tentukan turunan kedua fungsi trigonometri berikut.

a. $y = \sin(2x + \pi)$
b. $y = \cos^2 x$

Penyelesaian :

a. $y = \sin(2x + \pi)$
   $y' = 2\cos(2x + \pi)$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)
   $y'' = -4\sin(2x + \pi)$ (turunan $y = \cos u$ adalah $y' = -u' \sin u$)
b. $y = \cos^2 x$
   $y' = -2\cos x \sin x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u \cdot u'$)
   $y' = -\sin 2x$ ($\sin 2x = 2\sin x \cos x$)
   $y'' = -2\cos 2x$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

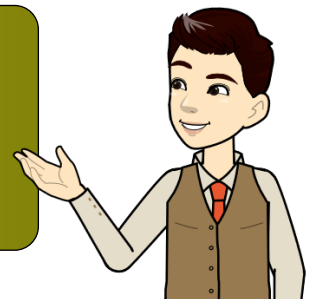
Gambar 6 memperlihatkan grafik dua fungsi yang naik pada (a, b). Kedua grafik menghubungkan titik A ke titik B tetapi kelihatan berbeda karena melengkung dalam arah berlainan. Bagaimana Ananda dapat membedakan antara dua tipe kelakuan ini? Dalam Gambar 7 garis singgung pada kurva ini telah digambarkan pada beberapa titik. Dalam (a) kurva terletak di atas garis singgung dan f disebut cekung ke atas

pada (a, b). Dalam (*b*) kurva terletak di bawah garis singgung dan g disebut cekung ke bawah pada (a, b).

Gambar 6 Kecekungan Fungsi

(b) cekung ke atas

(a) cekung ke bawah

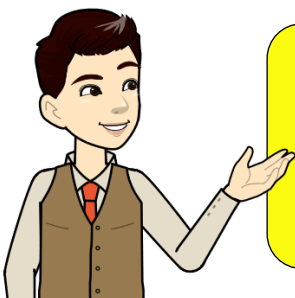
Gambar 7 Kecekungan Fungsi

Definisi 3

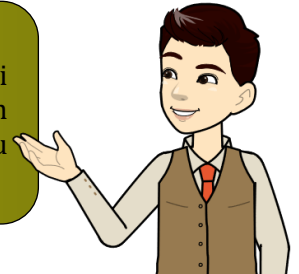
- Jika grafik f terletak di atas semua garis singgungnya pada suatu selang I (f' naik) maka grafik disebut cekung ke atas
- Jika grafik f terletak di bawah semua garis singgungnya pada suatu selang I (f' turun) maka grafik disebut cekung ke bawah

Kriteria sederhana untuk memutuskan di mana kurva cekung ke atas dan di mana kurva cekung ke bawah dengan cukup Ananda mengingat dalam hati bahwa turunan kedua dari f adalah turunan pertama dari f'. Jadi, f' naik jika f'' positif dan f' turun jika f''negative, sabagaimana teorema berikut.

Teorema 1

Andaikan f terturunkan dua kali pada selang terbuka (a, b)

- Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f cekung ke atas pada (a, b)
- Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f cekung ke bawah pada (a, b)

Jika kurva pada suatu titik P berubah dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah atau dari cekung ke bawah menjadi cekung ke atas maka titik P disebut titik belok. Secara umum, titik belok adalah titik tempat kurva berubahnya arah kecekungan.

Definisi 4

Misalkan f kontinu di c. Titik $(c, f(c))$ dinamakan titik belok dari grafik f jika f cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi yang lainnya dari I. Untuk menentukan titik belok suatu grafik fungsi maka di cari nilai c jika $f''(c) = 0$.

Agar Ananda lebih memahami lagi dalam menentukan kecekungan dan titik belok fungsi trigonometri menggunakan uji turunan kedua, pelajari contoh berikut.

Contoh 6

Tentukan interval di mana fungsi cekung ke atas dan cekung ke bawah dan carilah titik belok fungsi trigonometri $y = x + \cos x$ pada interval $0 < x < 2\pi$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama dan turunan kedua fungsi $f(x)$

  $f(x) = x + \cos x$

  $f'(x) = 1 - \sin x$

  $f''(x) = -\cos x$

- Syarat titik belok

  $f''(x) = 0$

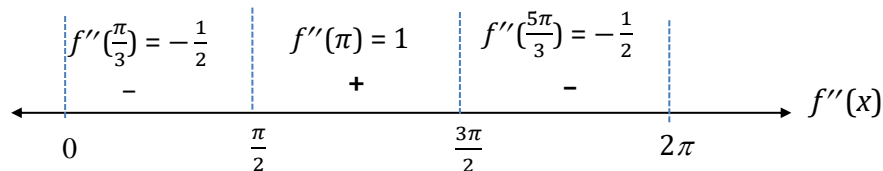
  $-\cos x = 0$

  $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ dan $x = \frac{3\pi}{2}$

- Hitung nilai $f(x)$

  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

  $x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

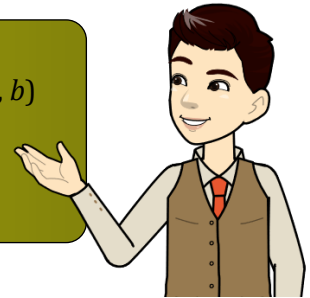
- Uji nilai fungsi $f''(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

Gambar 8 Uji nilai $f''(x)$

- Kesimpulan
  - Fungsi $f(x)$ cekung ke atas pada interval $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ karena $f''(x) > 0$
  - Fungsi $f(x)$ cekung ke bawah pada interval $0 < x < \frac{\pi}{2}$ atau $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ karena $f''(x) < 0$
  - Titik $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ merupakan titik belok, karena di titik $x = \frac{\pi}{2}$ dan $x = \frac{3\pi}{2}$ terjadi perubahan kecekungan.

Penerapan lain dari turunan kedua adalah pengujian untuk nilai maksimum dan minimum yang merupakan akibat dari Uji kecekungan.

Teorema 2

Andaikan f' dan f'' ada pada setiap titik dalam selang terbuka (a, b) yang memuat c, dan andaikan $f''(c) = 0$.

- Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f.
- Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.

Agar Ananda lebih memahami lagi dalam menentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri menggunakan uji turunan kedua, pelajari contoh berikut.

Contoh 7

Menggunakan uji turunan kedua, carilah titik maksimum dan minimum fungsi trigonometri $f(x) = x + \sin 2x$ pada interval $0^\circ < x < 180^\circ$.

Penyelesaian :

❖ Tentukan turunan pertama dan kedua dari fungsi $f(x)$

$f(x) = x + \sin 2x$

$f'(x) = 1 + 2\cos 2x$ (turunan $y = \sin ax$ adalah $y' = a \cos ax$)

$f''(x) = -4 \sin 2x$ (turunan $y = \cos ax$ adalah $y' = -a \sin ax$)

❖ Syarat stasioner

$f'(x) = 0$

$1 + 2\cos 2x = 0$

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$

$\cos 2x = \cos 120^\circ$ (cos $x = \cos \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = -\alpha + n.2\pi$)

$2x = 120^\circ + n.360^\circ$ atau $2x = -120^\circ + n.360^\circ$

$x = 60^\circ + n.180^\circ$ atau $x = -60^\circ + n.180^\circ$

$n = 0 \Rightarrow x = 60^\circ$ atau $n = 1 \Rightarrow x = 120^\circ$

❖ Menentukan nilai stasioner

$x = 60^\circ \Rightarrow f(60^\circ) = 60^\circ + \sin 120^\circ = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$x = 60^\circ \Rightarrow f(120^\circ) = 120^\circ + \sin 240^\circ = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

❖ Uji turunan kedua

$f''(x) = -4 \sin 2x$

$f''(60^\circ) = -4 \sin 120^\circ = (-4)\frac{1}{2}\sqrt{3} = -2\sqrt{3} < 0$

$f''(120^\circ) = -4 \sin 240^\circ = (-4)(-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} > 0$

❖ Kesimpulan

Titik $\left(60^\circ, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ merupakan titik balik maksimum, karena $f'' < 0$.

Titik $\left(120^\circ, \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ merupakan titik balik minimum, karena $f'' > 0$.

Bagaimana menyelesaikan masalah fungsi trigonometri dalam kehidupan sehari-hari? Untuk memahaminya, pelajari Contoh 7 berikut.

Contoh 7

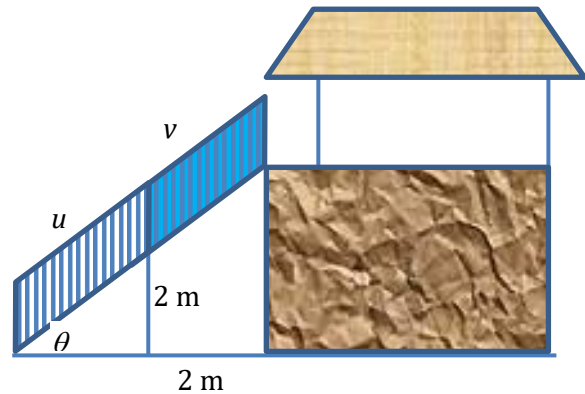
Sebuah rumah panggung dihubungkan dengan sebuah tangga menuju halamannya. Tangga tersebut ditopang oleh kayu dengan tinggi 2 m dan berjarak 2 m dari rumah. Jika permukaan tanah disekitar rumah dianggap datar dan tinggi tiang penyangga rumah tegak lurus pada permukaan tanah, tentukan panjang minimum dari tangga rumah tersebut.

Penyelesaian :

- Buat pemodelan dari permasalahan

  Misalkan θ, dengan $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ adalah sudut antara tangga dan permukaantanah dan panjang tangganya adalah $u + v$, maka

  $\sin\theta = \frac{2}{u} \Rightarrow u = \frac{2}{\sin\theta}$ dan

  $\cos\theta = \frac{2}{v} \Rightarrow v = \frac{2}{\cos\theta}$

Gambar 9. Panjang tangga rumah

  Sehingga panjang tangga dapat dimodelkan dalam bentuk fungsi berikut

  $f(\theta) = u + v = \frac{2}{\sin\theta} + \frac{2}{\cos\theta} = 2\csc\theta + 2\sec\theta$

  Tujuan kita adalah mencari nilai minimum dari fungsi tersebut.

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(\theta)$

  $f(\theta) = 2\csc\theta + 2\sec\theta$

  $f'(\theta) = -2\csc\theta\cot\theta + 2\sec\theta\tan\theta$

- Syarat stasioner

  $f'(x) = 0$

  $-2\csc\theta\cot\theta + 2\sec\theta\tan\theta = 0$

  $\sec\theta\tan\theta = \csc\theta\cot\theta$

  $\frac{1}{\cos\theta}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

  $\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} = 1$

  $\tan^3\theta = 1$

  $\tan\theta = 1$

  $\theta = \frac{\pi}{4}$, karena $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

- Menentukan nilai stasioner

  $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(\frac{\pi}{4}) = 2\csc\frac{\pi}{4} + 2\sec\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

- Kesimpulan

  Jadi, panjang tangga minimum dari rumah ke tanah adalah $4\sqrt{2}$ m.

C. Rangkuman

- Misalkan f fungsi trigonometri yang yang mempunyai turunan. Jika $f'(a) = 0$, maka $f(x)$ stasioner di titik $x = a$, dengan
  - Nilai $f(a)$ disebut nilai stasioner $f(x)$ di $x = a$.
  - Titik $(a, f(a))$ disebut titik stasioner
- Misalkan f fungsi trigonometri yang yang mempunyai turunan dan $f'(a) = 0$
  - Jika nilai f' bertanda positif di $x < a$ dan bertanda negatif di $x > a$, maka $(a, f(a))$ disebut titik maksimum lokal.
  - Jika nilai f' bertanda negatif di $x < c$ dan bertanda positif di $x > c$, maka $(c, f(c))$ disebut titik minimum lokal.
  - Jika disekitar titik $x = b$ tidak ada perubahan tanda nilai f', maka $(b, f(b))$ disebut titik belok horisontal.
- Jika $f'(x)$ (turunan pertama suatu fungsi) diturunkan lagi terhadap x, maka akan diperoleh turunan kedua fungsi $f(x)$ terhadap x, ditulis dengan $f''(x)$ atau y'' atau $\frac{d^2f}{dx^2}$ atau $\frac{d^2y}{dx^2}$.
- Jika grafik f terletak di atas semua garis singgungnya pada suatu selang I (f' naik) maka grafik disebut cekung ke atas.
- Jika grafik f terletak di bawah semua garis singgungnya pada suatu selang I (f' turun) maka grafik disebut cekung ke bawah.
- Andaikan f terturunkan dua kali pada selang terbuka (a, b)
  - Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f cekung ke atas pada (a, b)
  - Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f cekung ke bawah pada (a, b)
- Misalkan f kontinu di c. Titik $(c, f(c))$ dinamakan titik belok dari grafik f jika f cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi yang lainnya dari I. Menentukan titik belok suatu grafik fungsi maka di cari nilai c jika $f''(c) = 0$.
- Andaikan f' dan f'' ada pada setiap titik dalam selang terbuka (a, b) yang memuat c, dan andaikan $f''(c) = 0$.
  - Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f.
  - Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.

D. Latihan Soal

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Pada interval $0^o \le x \le 180^o$, nilai stasioner dari fungsi $f(x) = \sin 2x$ diperoleh pada….
   A. $x = 45^o$ dan $x = 135^o$
   B. $x = 0^o$, $x = 90^o$, dan $x = 180^o$
   C. $x = 0^o$ dan $x = 145^o$
   D. $x = 65^o$ dan $x = 135^o$
   E. $x = 45^o$ dan $x = 165^o$

2. Agar $f(x) = \sin(2x + b)$ mempunyai nilai stasioner pada $x = 36^o$, maka nilai b harus sama dengan ….
   A. -18^o
   B. -14^o
   C. 10^o

D. 14^o
E. 18^o

3. Salah satu nilai stasioner dari fungsi $f(x) = 2 + \cos^2 x$ adalah ….
A. 0
B. 1
C. 3
D. 4
E. 5

4. Titik stasioner dari fungsi $f(x) = \tan^2 x$ adalah untuk nilai x = ….
A. $\{0^o, 45^o\}$
B. $\{180^o, 360^o\}$
C. $\{45^o, 360^o\}$
D. $\{90^o, 180^o\}$
E. $\{45^o, 90^o$

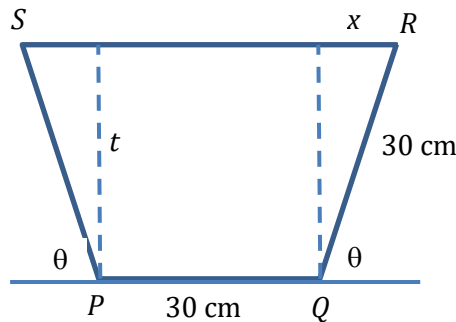
5. Pada interval $0^o \leq x \leq 180^o$, nilai maksimum dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ adalah…
A. 1
B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
D. $\sqrt{2}$
E. $\sqrt{3}$

6. Nilai minimum dari fungsi $f(x) = \sin^2 x + \sin x$ adalah ….
A. $-\frac{1}{4}$
B. 0
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{3}{4}$
E. 2

7. Jika diketahui $y = \cos^2 x$, maka $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y$ = ….
A. –2
B. –1
C. 0
D. 1
E. 2

8. Fungsi $f(x) = \sin^2 x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, cekung ke bawah pada interval ….
A. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$
B. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$ dan $0 < x < 3$
C. $0 < x < \frac{\pi}{4}$ dan $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$
D. $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ dan $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$
E. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ dan $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$

9. Titik belok fungsi $y = \sin x + \cos x$ pada interval $[0, \pi]$ adalah ....
   A. $(\frac{\pi}{4}, 0)$
   B. $(\frac{\pi}{3}, 0)$
   C. $(\frac{\pi}{2}, 0)$
   D. $(\frac{3\pi}{4}, 0)$
   E. $(\pi, 0)$

10. Sebuah pancuran atap (talang) logam dengan permukaan berbentuk prisma memiliki sisi 30 cm dan alas mendatar 30 cm, sisi-sisi talang tersebut tersebut membentuk sudut yang sama besar, yaitu θ. Besar sudut θ agar kapasitas pancuran maksimum adalah ....
    A. $\frac{\pi}{12}$
    B. $\frac{\pi}{6}$
    C. $\frac{\pi}{5}$
    D. $\frac{\pi}{4}$
    E. $\frac{\pi}{3}$

Pembahasan Latihan Soal Kegiatan Pembelajaran 2

1. Pada interval $0^o \le x \le 180^o$, nilai stasioner dari fungsi $f(x) = \sin 2x$ diperoleh pada....
   Jawaban: A

   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$
     $f(x) = \sin 2x$
     $f'(x) = 2 \cos 2x$ (turunan $y = \sin ax$ adalah $y' = a \cos ax$)
   - Syarat stasioner
     $f'(x) = 0$
     $2 \cos 2x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{2}$)
     $\cos 2x = 0$
     $\cos 2x = \cos 90^o$ ($\cos x = \cos \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = -\alpha + n.2\pi$)
     $2x = 90^o + n.\,360^o$ $\quad$ $2x = -90^o + n.\,360^o$
     $x = 45^o + n.\,180^o$ $\quad$ $x = -45^o + n.\,180^o$
     $n = 0 \Rightarrow x = 45^o$ $\quad$ $n = 1 \Rightarrow x = 135^o$
   - Kesimpulan
     Jadi, pada interval $0^o \le x \le 180^o$, nilai stasioner dari fungsi $f(x) = \sin 2x$ diperoleh pada $x = 45^o$ dan $x = 135^o$.

2. Agar $f(x) = \sin(2x + b)$ mempunyai nilai stasioner pada $x = 36^o$, maka nilai b harus sama dengan ....
   Jawaban: E

Penyelesaian:

- Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$

  $f(x) = \sin(2x + b)$

  $f'(x) = 2\cos(2x + b)$ (turunan $y = \sin(ax+b)$ adalah $y' = a\cos(ax+b)$)
- Syarat stasioner

  $f'(x) = 0$

  $2\cos(2x + b) = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{2}$)

  $\cos(2x + b) = 0$

  $\cos(2x + b) = \cos 90^o$ ($\cos x = \cos\alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = -\alpha + n.2\pi$)

  $2x + b = 90^o + n.360^o$ | $2x + b = -90^o + n.360^o$

  $b = 90^o - 2x + n.360^o$ | $b = -90^o - 2x + n.360^o$

  $b = 90^o - 2(36^o) + n.360^o$ | $b = -90^o - 2(36^o) + n.360^o$

  $b = 18^o + n.360^o$ | $b = -162^o + n.360^o$

  $n = 0 \Rightarrow b = 18^o$ | $n = 1 \Rightarrow x = 198^o$
- Kesimpulan

  Jadi, agar $f(x) = \sin(2x + b)$ mempunyai nilai stasioner pada $x = 36^o$, maka nilai b harus sama dengan 18^o.

3. Salah satu nilai stasioner dari fungsi $f(x) = 2 + \cos^2 x$ adalah ….

   Jawaban: C

   Penyelesaian:

   - Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$

     $f(x) = 2 + \cos^2 x$

     $f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2\,u\,.\,u'$)
   - Syarat stasioner

     $f'(x) = 0$

     $-\sin 2x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan (-1))

     $\sin 2x = 0$

     $\sin 2x = \sin 0^o$ ($\sin x = \sin\alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = (180^o - \alpha) + n.2\pi$)

     $2x = 0^o + n.360^o$ | $2x = 180^o + n.360^o$

     $x = n.180^o$ | $x = 90^o + n.180^o$

     $n = 0 \Rightarrow x = 0^o$ | $n = 0 \Rightarrow x = 90^o$

     $n = 1 \Rightarrow x = 180^o$ | $n = 1 \Rightarrow x = 270^o$

     $n = 2 \Rightarrow x = 360^o$
   - Nilai stasioner

     $x = 0^o \Rightarrow f(0^o) = 2 + \cos^2(0^o) = 3$

     $x = 90^o \Rightarrow f(90^o) = 2 + \cos^2(90^o) = 2$

     $x = 180^o \Rightarrow f(180^o) = 2 + \cos^2(180^o) = 3$

     $x = 270^o \Rightarrow f(270^o) = 2 + \cos^2(270^o) = 2$

     $x = 360^o \Rightarrow f(360^o) = 2 + \cos^2(360^o) = 3$

     Jadi, nilai stasionernya adalah 2 dan 3.

4. Titik stasioner dari fungsi $f(x) = \tan^2 x$ adalah untuk nilai $x = ….$

   Jawaban: B

   Penyelesaian:

   - Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$

     $f(x) = \tan^2 x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u\,.\,u'$)

     $f'(x) = 2\tan x \sec^2 x$ (turunan $y = \tan x$ adalah $y' = \sec^2 x$)
   - Syarat stasioner

     $f'(x) = 0$

     $2\tan x \sec^2 x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{2}$)

$\tan x \sec^2 x = 0$
$\tan x = 0$ atau $\sec^2 x = 0$ (tidak ada nilai x yang memenuhi)
$x = 0^o, 180^o, 360^o$

- Kesimpulan
  Jadi, titik stasioner dari fungsi $f(x) = \tan^2 x$ adalah untuk nilai $x = 0^o$, 180^o, dan 360^o

5. Pada interval $0^o \leq x \leq 180^o$, nilai maksimum dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ adalah...
   Jawaban: D

   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dan kedua dari fungsi $f(x)$
     $f(x) = \sin x + \cos x$
     $f'(x) = \cos x - \sin x$
     $f''(x) = -\sin x - \cos x$
   - Syarat stasioner
     $f'(x) = 0$
     $\cos x - \sin x = 0$
     $\cos x = \sin x$
     $\tan x = 1$
     $x = 45^o, 225^o$
   - Menentukan nilai stasioner
     $x = 45^o \Rightarrow f(45^o) = \sin 45^o + \cos 45^o = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$
     $x = 225^o \Rightarrow f(225^o) = \sin 225^o + \cos 225^o = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$
   - Uji turunan kedua
     $f''(x) = -\sin x - \cos x$
     $x = 45^o \Rightarrow f''(45^o) = -\sin 45^o - \cos 45^o = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2} < 0$
     $x = 225^o \Rightarrow f''(225^o) = -\sin 225^o - \cos 225^o = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2} > 0$
   - Kesimpulan
     Nilai $f(45^o) = \sqrt{2}$ merupakan nilai maksimum, karena $f'' < 0$.
     Titik $f(225^o) = -\sqrt{2}$ merupakan nilai minimum, karena $f'' > 0$.

6. Nilai minimum dari fungsi $f(x) = \sin^2 x + \sin x$ adalah ....
   Jawaban: A

   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dan kedua dari fungsi $f(x)$
     $f(x) = \sin^2 x + \sin x$
     $f'(x) = 2 \sin x \cos x + \cos x = \sin 2x + \cos x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u \cdot u'$)
     $f''(x) = 2 \cos 2x - \sin x$ (turunan $y = \sin ax$ adalah $y' = a \cos ax$)
   - Syarat stasioner
     $f'(x) = 0$
     $2 \sin x \cos x + \cos x = 0$
     $\cos x (2\sin x + 1) = 0$
     $\cos x = 0$ atau $\sin x = -\frac{1}{2}$
     $x = 90^o, 270^o$ $x = 210^o, 330^o$
   - Menentukan nilai stasioner
     $x = 90^o \Rightarrow f(90^o) = \sin^2 90^o + \sin 90^o = 1 + 1 = 2$
     $x = 210^o \Rightarrow f(210^o) = \sin^2 210^o + \sin 210^o = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$
     $x = 270^o \Rightarrow f(270^o) = \sin^2 270^o + \sin 270^o = 1 - 1 = 0$

$x = 330^o$ $\Rightarrow$ $f(330^o) = \sin^2 330^o + \sin 330^o = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

❖ Uji turunan kedua

$f''(x) = 2 \cos 2x - \sin x$

$x = 90^o$ $\Rightarrow f''(90^o) = 2 \cos 2(90^o) - \sin (90^o) = -2 - 1 = -3 < 0$

$x = 210^o$ $\Rightarrow f''(210^o) = 2 \cos 2(210^o) - \sin (210^o) = 2(\frac{1}{2}) - (-1) = 2 > 0$

$x = 270^o$ $\Rightarrow f''(270^o) = 2 \cos 2(270^o) - \sin (270^o) = 2(-1) - (-1) = -1 < 0$

$x = 330^o$ $\Rightarrow f''(330^o) = 2 \cos 2(330^o) - \sin (330^o) = 2(\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} > 0$

❖ Kesimpulan

Nilai $f(210^o) = f\ (330^o) = -\frac{1}{4}$ merupakan nilai minimum, karena $f'' > 0$.

7. Jika diketahui $y = \cos^2 x$, maka $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = ...$

Jawaban: E

Penyelesaian:

❖ Tentukan turunan pertama dan kedua dari fungsi y

$y = \cos^2 x$

$\frac{dy}{dx} = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u \cdot u'$)

$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\cos 2x$ (turunan $y = \sin ax$ adalah $y' = a \cos ax$)

$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = -2\cos 2x + 4\cos^2 x$

$= -2(2\cos^2 x - 1) + 4\cos^2 x$ ($\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$)

$= -4\cos^2 x + 2 + 4\cos^2 x$

$= 2$

8. Fungsi $f(x) = \sin^2 x$, $0 \le x \le 2\pi$, cekung ke bawah pada interval ....

Jawaban: E

Penyelesaian:

❖ Tentukan turunan pertama dan turunan kedua fungsi $f(x)$

$f(x) = \sin^2 x$

$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

$f''(x) = 2\cos 2x$

❖ Syarat titik belok

$f''(x) = 0$

$2\cos 2x = 0$

$\cos 2x = 0$

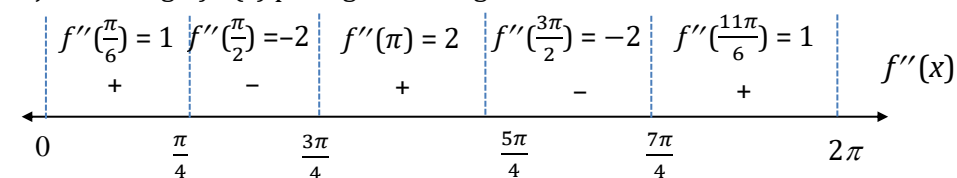
❖ $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{2}$ ($\cos x = \cos \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = -\alpha + n.2\pi$)

$2x = \frac{\pi}{2} + n.\ 2\pi$ $2x = -\frac{\pi}{2} + n.\ 2\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + n.\ \pi$ $x = -\frac{\pi}{4} + n.\ \pi$

$n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ $n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

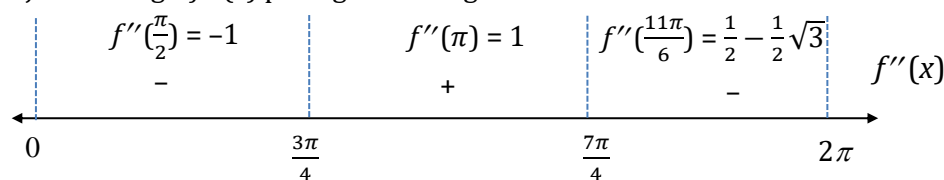
$n = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$ $n = 2 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$

❖ Uji nilai fungsi $f''(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

❖ Kesimpulan

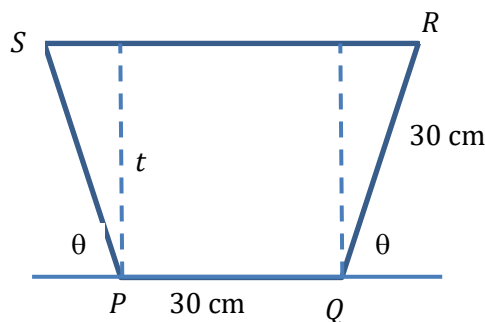
- Fungsi $f(x)$ cekung ke atas pada interval $0 < x < \frac{\pi}{4}$ atau $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ atau $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$ karena $f''(x) > 0$
- Fungsi $f(x)$ cekung ke bawah pada interval $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ atau $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$ karena $f''(x) < 0$

9. Titik belok fungsi $y = \sin x + \cos x$ pada interval $[0, \pi]$ adalah ….
Jawaban: D

Penyelesaian:

- Tentukan turunan pertama dan turunan kedua fungsi $f(x)$
  $f(x) = \sin x + \cos x$
  $f'(x) = \cos x - \sin x$
  $f''(x) = -\sin x - \cos x$
- Syarat titik belok
  $f''(x) = 0$
  $-\sin x - \cos x = 0$
  $-\sin x = \cos x$
  $\frac{\sin x}{\cos x} = -1$
  $\tan x = -1$
  $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$
- Nilai fungsi
  $x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow f(\frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = 0$
  $x = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow f(\frac{7\pi}{4}) = \sin\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4} = 0$
- Uji nilai fungsi $f''(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

- Kesimpulan
  - Fungsi $f(x)$ cekung ke atas pada interval $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$ karena $f''(x) > 0$
  - Fungsi $f(x)$ cekung ke bawah pada interval $0 < x < \frac{3\pi}{4}$ atau $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$ karena $f''(x) < 0$
  - Titik $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ dan $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$ merupakan titik belok, karena di titik $x = \frac{3\pi}{4}$ dan $x = \frac{7\pi}{4}$ terjadi perubahan kecekungan.

10. Sebuah pancuran atap (talang) logam dengan permukaan berbentuk prisma memiliki sisi 30 cm dan alas mendatar 30 cm, sisi-sisi talang tersebut tersebut membentuk sudut yang sama besar, yaitu θ. Besar sudut θ agar kapasitas pancuran maksimum adalah ….

x

Jawaban: E

Penyelesaian:

❖ Buat model matematika dari permasalahan

Volume atau kapasitas pancuran maksimum, jika luas penampang talang itu maksimum.

Misalkan tinggi pancuran terhadap bidang alas adalah t, maka $t = 30 \sin \theta$ dan $x = 30 \cos \theta$ dengan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Luas permukaan talang dinyatakan sebagai fungsi dari θ, maka

$L(\theta)$ = luas trapezium $PQRS$

$= \frac{1}{2}(PQ + RS) \times t$

$= \frac{1}{2}(30 + 30 + 2x) \times t$

$= \frac{1}{2}(60 + 2x) \times t$

$= 30t + xt$

$= 30\,(30 \sin \theta) + (30 \cos \theta)(30 \sin \theta)$

$= 900 \sin \theta + 900 \cos \theta \sin \theta$

$= 900 \sin \theta + 450 \sin 2\theta$

❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(\theta)$

$L(\theta) = 900 \sin \theta + 450 \sin 2\theta$

$L'(\theta) = 900 \cos \theta + 900 \cos 2\theta$

❖ Syarat stasioner

$L'(x) = 0$

$900 \cos \theta + 900 \cos 2\theta = 0$

$\cos \theta + \cos 2\theta = 0$

$\cos \theta + (2\cos^2 \theta - 1) = 0$

$2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$

$(2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0$

$\cos \theta = \frac{1}{2}$ atau $\cos \theta = -1$

$\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \pi$ (tidak memenuhi)

❖ Menentukan nilai stasioner

$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow L(\frac{\pi}{3}) = 900 \sin \frac{\pi}{3} + 450 \sin \frac{2\pi}{3} = 900\,(\frac{1}{2}\sqrt{3}) + 450\,(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 675\sqrt{3}$

❖ Kesimpulan

Jadi, agar kapasitas volume pancuran maksimum, maka besar suduta $\theta = \frac{\pi}{3}$.

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai dan titik stasioner fungsi trigonometri ?		
2.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi trigonometri dengan uji turunan pertama?		
3.	Apakah Ananda mampu menentukan turunan kedua fungsi trigonometri?		
4.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi trigonometri dengan uji turunan kedua?		
5.	Apakah Ananda mampu menentukan titik belok fungsi trigonometri ?		
6.	Apakah Ananda mampu menentukan kecekungan fungsi trigonometri ?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

1. Gradien garis singgung kurva $y = \sin(x + 20^o)$ pada $x = 10^o$ adalah ….
   A. $\frac{1}{2}$
   B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   D. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. Garis g menyinggung kurva $y = \sin x + \cos x$ di titik yang berabsis $\frac{1}{3}\pi$. Gradien garis yang tegak lurus pada garis g adalah ….
   A. $1 - \sqrt{3}$
   B. $1 + \sqrt{3}$
   C. 1
   D. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$
   E. $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$

3. Diketahui garis g menyinggung kurva $f(x) = \frac{2+\cos x}{\sin x}$ di titik $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$. Garis g memotong sumbu Y dititik ….
   A. $(0, 2 - \frac{\pi}{2})$
   B. $(0, 1)$
   C. $(0, \frac{\pi}{2})$
   D. $(0, \pi)$
   E. $(0, 2 + \frac{\pi}{2})$

4. Pada interval $20^o < x < 60^o$, gradien garis singgung kurva $y = \sin^2(2x)$ adalah $\sqrt{3}$. Dengan demikian maka absis titik singgungnya adalah ….
   A. 25^o
   B. 30^o
   C. 35^o
   D. 40^o
   E. 45^o

5. Garis singgung kurva $y = \frac{1}{2}\cos(2x + 20^o)$ sejajar dengan garis $2y + x + 4 = 0$. Salah satu absis titik singgung kurva adalah ….
   A. 35^o
   B. 55^o
   C. 65^o
   D. 75^o
   E. 85^o

6. Persamaan garis singgung kurva $y = 2\cos x + \sin x$ di titik $x = 0^o$ adalah ….
   A. $x + y + 2 = 0$
   B. $x + y - 2 = 0$

C. $x - y + 2 = 0$
D. $x - y - 2 = 0$
E. $x - y + 4 = 0$

7. Persamaan garis singgung kurva $y = 2\sin x + \sin 2x$ di titik $x = 60^o$ adalah ….
   A. $2y - 3\sqrt{3} = 0$
   B. $2y + 3\sqrt{3} = 0$
   C. $y - 3\sqrt{3} = 0$
   D. $y + 3\sqrt{3} = 0$
   E. $x + y - 3\sqrt{3} = 0$

8. Grafik fungsi $f(x) = \cos^2 x$ akan turun pada interval ...
   A. $0 < x < \pi$
   B. $0 < x < \frac{\pi}{2}$
   C. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
   D. $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$
   E. $\pi < x < 2\pi$

9. Pada interval $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ maka grafik fungsi $f(x) = \cos 2x$ akan ....
   A. selalu naik
   B. selalu turun
   C. naik kemudian turun
   D. turun kemudian naik
   E. naik kemudian turun kemudian naik

10. $f(x) = \sin x + \cos x \sin x + \cos^2 x \sin x + ...$ untuk $0 < x < \pi$
   A. merupakan fungsi naik
   B. merupakan fungsi turun
   C. mempunyai maksimum saja
   D. mempunyai minimum saja
   E. mempunyai maksimum dan minimum

11. Nilai stasioner dari fungsi $f(x) = 2 \sin x$ adalah ….
   A. –2 dan 2
   B. –1 dan 1
   C. 0
   D. 0 dan 1
   E. 0 dan 2

12. Nilai maksimum fungsi $f(x) = \cos^2 (2x)$ dapat dicapai pada x sama dengan ….
   A. 30^o
   B. 45^o
   C. 60^o
   D. 75^o
   E. 90^o

13. Pada interval $0^o \le x \le 180^o$, nilai minimum dari fungsi $f(x) = \cos (2x + 10^o)$ diperoleh pada $x = ….$
   A. 45^o
   B. 55^o
   C. 65^o

D. 75^o
E. 85^o

14. Pada interval $\frac{\pi}{3} < x < \pi$, nilai maksimum dari fungsi $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos^2 x + \sin x$ dapat dicapai pada $x =$ ….
    A. $\frac{1}{2}\pi$
    B. $\frac{3}{5}\pi$
    C. $\frac{3}{4}\pi$
    D. $\frac{2}{3}\pi$
    E. $\frac{4}{5}\pi$

15. Titik minimum dari fungsi $y = \frac{1+\sin x}{\sin x}$ pada interval $0^o \le x \le 360^o$ adalah ….
    A. $(90^o, 2)$
    B. $(270^o, 0)$
    C. $(45^o, 1+\sqrt{2})$
    D. $(150^o, 1)$
    E. $(30^o, 3)$

16. Pada interval $0^o < x < 180^o$ titik maksimum dari fungsi $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ adalah ….
    A. $(30^o, 2)$
    B. $\left(45^o, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$
    C. $\left(60^o, \sqrt{3}\right)$
    D. $(150^o, -1)$
    E. $(120^o, 0)$

17. Nilai minimum dari fungsi $f(x) = x + 2\cos x$ pada interval $0 < x < \pi$ adalah ….
    A. $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$
    B. $\frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
    C. $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$
    D. $\frac{5\pi}{6} + \sqrt{3}$
    E. $\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$

18. Titik maksimum dari fungsi $y = \frac{1}{3}\cos^3 x + \sin^2 x$ pada interval $0^o < x < 180^o$ adalah ….
    A. $\left(0^o, \frac{1}{3}\right)$
    B. $\left(45^o, \frac{6+\sqrt{2}}{12}\right)$
    C. $(90^o, 1)$
    D. $\left(120^o, \frac{17}{24}\right)$
    E. $\left(150^o, \frac{2-\sqrt{3}}{8}\right)$

19. Diketahui $y = x \sin x$, maka $y'' + y =$ ….
    A. $\sin x \cos x$
    B. $2 \cos x$
    C. $\cos x$
    D. $\cos x - \sin x$
    E. $2 \cos x - 1$

20. Turunan kedua dari $f(x) = \sin^2 2x$ adalah ....
    A. $6 \sin 2x$
    B. $12 \cos 4x$
    C. $8 \cos 4x$
    D. $8 \sin 4x$
    E. $3 \sin 2x \cos 2x$

21. Interval fungsi trigonometri $f(x) = x - 3 \cos x$ cekung ke bawah adalah ....
    A. $0 < x < \frac{\pi}{2}$
    B. $0 < x < \pi$
    C. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
    D. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$
    E. $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

22. Interval fungsi trigonometri $f(x) = \cos^2 x$ cekung ke atas adalah ....
    A. $0 < x < \frac{\pi}{4}$
    B. $0 < x < \frac{\pi}{2}$
    C. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$
    D. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$
    E. $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

23. Titik belok fungsi trigonometri $y = 2 - \cos x$ adalah ....
    A. $(0, 1)$
    B. $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$
    C. $(\pi, 3)$
    D. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\right)$
    E. $(2\pi, 1)$

24. Sebuah ayunan bergetar dengan periode 1,5 sekon dan amplitudo ayunan sebesar 100 cm. Ayunan mencapai percepatan maksimum pada detik ke ....
    A. $\frac{3}{8}$
    B. $\frac{1}{2}$
    C. $\frac{3}{4}$
    D. 1
    E. 2

25. Dua orang pekerja bangunan hendak menarik tumpukan bahan bangunan di sepanjang bidang lurus. Apabila gaya yang diperlukan untuk menarik bahan bangunan seberat W dinyatakan dalam $F(\theta) = \frac{\mu W}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$ dengan θ adalah sudut antara tali dengan bidang datar dan μ adalah koefisien gesekan. Apabila koefisien gaya gesek $\mu = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, gaya minimum yang diperlukan oleh pekerja tersebut adalah ....
    A. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
    B. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
    C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
    D. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
    E. $\sqrt{3}$

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. C
2. B
3. E
4. B
5. C
6. C
7. A
8. C
9. C
10. B
11. A
12. E
13. E
14. C
15. B
16. A
17. C
18. C
19. B
20. C
21. D
22. C
23. B
24. A
25. B

DAFTAR PUSTAKA

Budhi, Wono Setya. 2010. *Matematika 4*. Jakarta: Zamrud Kemala.

Chakrabarti, J, *et al*. 2014. *Matematika untuk SMA Kelas XI Peminatan Matematika dan Ilmu Alam*. Bogor: Quadra.

Priatna, Nanang dan Titi Sukamto. 2016. *Buku Siswa Aktif dan Kreatif Belajar Matematika untuk SMA/MA Kelas XII Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam*. Bandung: Grafindo Media Pratama.

Purcell, E.J., dan Dale Varberg. 1990. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

Simangunsong, W., dan Frederik M. Poyk. 2016. *Matematika Peminatan Kelas XII SMA/MA*. Jakarta: Gematama.

Suparmin dan Aditya Nur Rochma. 2016. *Matematika Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam untuk SMA/MA Kelas XII*. Surakarta: Mediatama.

Stewart, James. 2001. *Kalkulus Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.